מבחן באלגברה 1 מ' -104016-
סמסטר אביב תשס"ב - מועד א'
פתרונות מלאים

שם משפחה:		שם פרטי:	
מס. סטודנט:		פקולטה:	

קרא בעיון את כל ההוראות:

- משך הבחינה שלוש שעות . אין להשתמש בחומר עזר.
- במבחן 4 שאלות. יש לפתור את כל 4 השאלות.
- יש לענות על השאלות בצורה מסודרת ויש לנמק כל תשובה.
  יורדו נקודות על כתיבה מרושלת. תשובה בלתי מנומקת לא תחשב.
- יש לרשום את תוצאות החישובים במשבצות המיועדות לכך, המופיעות מיד אחרי השאלות. תוצאה שתרשם במקום אחר לא תחשב !
- יש לבצע את כל החישובים בתוך קובץ הדפים (ולמחוק בבירור טיוטות).

ב ה צ ל ח ה !

שאלות	ציון
שאלה מס' 1	
שאלה מס' 2	
שאלה מס' 3	
שאלה מס' 4	
סה"כ	

שאלה מס. 1 : (35 נקודות)

תהי T טרנספורמציה ליניארית $T:R^3 \to R^3$ הנתונה ע"י :

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\ ,\ T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\ ,\ T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

יהי $B=(b_1,b_2,b_3)$ בסיס (סדור) של R^3 כאשר $b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\ b_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\ ,\ b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

א. מצא את $[T]_B$.

ב. האם $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}(T)$?

ג. מצא בסיס ל- $Ker(T)$.

ד. מצא בסיס ל- $\mathrm{Im}(T)$.

ה. חשב את $\dim\left(\mathrm{Im}(T)\cap Ker(T)\right)$.

ו. מצא את המטריצה המייצגת $[T]_E$ של T ביחס לבסיס הסטנדרטי

$E=(e_1,e_2,e_3)$ כאשר $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

פתרון שאלה מספר 1

א. נמצא $[T]_B$. נרשום את הוקטורים בשורות לצורך הנוחות, אך נזכור כי את וקטורי הקוארדינטות של תמונות B יש לכתוב כעמודות $[T]_B$.

$$B = \{b_1 = (1, 2, 3)\ ,\ b_2 = (1, -1, 0)\ ,\ b_3 = (1, 1, 1)\}$$

$T(b_1) = T(1, 2, 3) = (1, -1, 0) = 0b_1 + b_2 + 0b_3$

$T(b_2) = T(1, -1, 0) = (-2, 2, 0) = 0b_1 - 2b_2 + 0b_3$

$T(b_3) = T(1, 1, 1) = (3, 1, 2) = 0b_1 + 1b_2 + 2b_3$

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ב. הוקטור $(1, 2, 3)$ שייך ל- ImT אם״ם הוא קומבינציה ליניארית של התמונות של איברי B, הפורשות את ImT. נדרג את המטריצה המורכבת משני הוקטורים $T(b_1)$ ו- $T(b_3)$, שהם בסיס לתמונה של T כי הם פורשים ובלתי תלויים ליניארית, והוקטור $(1, 2, 3)$ ונבדוק אם מתאפסת שורה במטריצה אחרי הדרוג:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&4&2\\0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

לא התאפסה שורה בדרוג, לכן הוקטור $(1, 2, 3)$ אינו קומבינציה של איברי בסיס של התמונה, ולכן הוא אינו בתמונה.

<u>דרך נוספת</u>: ידוע כי עמודות $[T]_B$ הן וקטורי קואורדינטות של תמונות B לפי בסיס B. לפי המטריצה $[T]_B$, ניתן לראות שכל וקטור ב- ImT הוא קומבינציה ליניארית של b_2 ו- b_3 בלבד כי השורה הראשונה של $[T]_B$ היא כולה אפסים, לכן b_1 לא משתתף בקומבינציות של התמונות.לכן, כדי ש- $(1 , 2 , 3)$ יהיה בתמונה של T, עליו להיות קומבינציה ליניארית של b_2 ו- b_3 . אבל $(1 , 2 , 3) = b_1$, ו- $\{b_1 , b_2 , b_3\}$ הם בסיס, לכן b_1 לא יכול להיות קומבינציה ליניארית של b_2 ו- b_3 לכן הוא לא בתמונה.

ג. בסיס ל- KerT:

<u>דרך א׳</u>: נסמן $v=(x, y, z)$, אז $v\in KerT$ אם״ם $T(v)=0$. לפי משפט: $[T]_B[v]_B = [T(v)]_B$ לכן, אם נפתור: $[T]_B[v]_B = 0$ נקבל וקטור קואורדינטות של הגרעין **<u>לפי הבסיס B</u>** (כי אנו עובדים עם מטריצה מייצגת לפי בסיס B):

$$[T]_B[v]_B = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&-2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{cases}x-2y+z=0\\z=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2y\\z=0\end{cases}$$

$$(x, y, z) = (2y, y, 0) = y(2,1,0)$$

וקטור הקואורדינטות של הגרעין לפי B הוא $(2,1,0)$ לכן בסיס לגרעין הוא:

$$2b_1 + b_2 + 0b_3 = 2(1, 2, 3) + (1, -1, 0) = (3, 3, 6) \quad\Rightarrow\quad \{(1, 1, 2)\}$$

ומימד הגרעין הוא 1.

<u>דרך ב׳</u>: קל לראות מהתמונות על איברי הבסיס B כי מימד התמונה הוא 2 ולכן, מימד הגרעין הוא 1. מכאן, כי עלינו למצוא וקטור אחד שונה מ- 0 שתמונתו 0. מאחר ו- $T(b_1) = (1, -1, 0)$ ו- $T(b_2) = (-2, 2, 0)$ הרי ש-

$$T(2b_1 + b_2) = 2T(b_1) + T(b_2) = 2(1, -1, 0) + (-2, 2, 0) = (0,0,0)$$

כלומר, $2b_1 + b_2 \in KerT$. אבל: $2b_1 + b_2 = 2(1, 2, 3) + (1, -1, 0) = (3, 3, 6) \neq (0,0,0)$ לכן זהו בסיס ל- KerT או (כמו קודם) $\{(1, 1, 2)\}$.

ד. כידוע, תמונות של איברי בסיס פורשות את ImT, לכן התמונות של איברי B פורשות את ImT קל לראות כי 2 מתוך התמונות של b_1 , b_2, b_3 הן בלתי תלויות ליניארית, לכן מהוות בסיס ל- ImT. לכן: $\{(1, -1, 0) , (3, 1, 2)\}$ הוא בסיס, או, אחרי דרוג נקבל: $\{(1, -1, 0) , (0, 2, 1)\}$. מכאן כי מימד התמונה הוא 2.

ה. אפשרות אחת היא לחשב את $ImT \cap KerT$ ואז למצוא את מימד החיתוך. אבל, מאחר ורוצים רק מימד, נחשב בצורה שונה: מאחר ו- $ImT \cap KerT \subseteq KerT$, ולפי סעיף ג', $dimKerT = 1$, הרי ש- $dim(ImT \cap KerT) \leq 1$, והמימד יהיה שווה ל- 1 אם"ם $ImT \cap KerT = KerT$. לכן, כל שעלינו לעשות הוא לקבוע האם $ImT \cap KerT \supseteq KerT$ (כי הכלה בשני הכיוונים נותנת שוויון).
לפי סעיף ד', מהבסיס המדורג מקבלים כי איבר כללי בתמונה הוא מהצורה: $(a, -a+2b,b)$. לכן, כיוון שלמשוואות: $(a, -a+2b,b) = (1, 1, 2)$ אין פתרון, הרי ש- $KerT \not\subset ImT$ כלומר $KerT \not\subset ImT \cap KerT$, ומכאן כי: $dim(ImT \cap KerT) = 0$.

ו. לפי משפט, אם E ו- B בסיסים שונים של מרחב וקטורי V, אז: $[T]_E = \underset{E\to B}{P^{-1}} [T]_B \underset{B\to E}{P}$.

כאשר P היא מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס E.

כיוון שאת P^{-1} קל יותר לחשב , נחשב אותה תחילה, ואז P היא ההפכית של P^{-1}.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\3&0&1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad P=\left((P^{-1})\right)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\3&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-3&-1&-2&1&0\\0&-3&-2&-3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-3&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&-1&1\\0&-3&0&-1&2&-1\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&-1&1\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\left((P^{-1})\right)^{-1}=P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

לכן:

$$[T]_E=\underset{E\to B}{P^{-1}}[T]_B\underset{B\to E}{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\1&1&-1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&-3\\2&0&-1\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$[T]_E=\begin{pmatrix}2&4&-3\\2&0&-1\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

<u>שאלה מס. 2</u> : (35 נקודות)

תהי A המטריצה הממשית
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשב את A^2.

ב. מצא את כל הערכים העצמיים של A, וקטורים עצמיים מתאימים, ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של כל ערך עצמי.

ג. חשב את $tr(A^4 - 4A^3 + 4A^2)$.

ד. ידוע כי A היא המטריצה המייצגת של טרנספורמציה ליניארית $T:V \to V$ ביחס לבסיס (סדור) B, כאשר V הוא מרחב כל המטריצות הממשיות 2×2

ו- $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

ו- $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

מצא את $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כאשר a,b,c,d הם מספרים ממשיים.

פתרון שאלה מספר 2:

א. $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A$$

ב. נמצא ערכים עצמיים של A (**לא** ע"י חישוב פולינום אופייני): קל לראות ש- A מדרגה 2 (כי השורה הראשונה היא כפולה של השורה השלישית והשורה השניה היא כפולה של השורה הרביעית. בנוסף, שורות 1 ו- 2 הן בלתי תלויות ליניארית). מכאן כי $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של A מריבוי גיאומטרי 2 כי: $4 - r(0I - A) = 4-r(A) = 4 - 2 = 2$.

קל לראות כי אם נחסיר 2 מהאלכסון של A, נקבל שלמטריצה $A - 2I$ יש שורות תלויות, כלומר: $|A - 2I| = 0$ ולכן 2 הוא ערך עצמי של A. מאחר וסכום הערכים העצמיים של A שווה לעקבה שלה שהיא 4, הרי ש: $tr(A) = 0 + 0 + 2 + \lambda_4 = 4$ כלומר $\lambda_4 = 2$. מכאן כי 2 הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 2. כיוון שמצאנו 4 ערכים עצמיים, ו- A היא מטריצה 4×4 הרי שמצאנו את כולם כלומר הערכים העצמיים הם: 0 ו- 2. כיוון ש- 0 לא הופיע פעם נוספת כערך עצמי, הרי שהריבוי האלגברי שלו הוא 2.

נחשב ריבוי גיאומטרי של 2:

$$n - r(A-2I) = 4 - r\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

קיבלנו כי ל- A שני ערכים עצמיים: 0 ו- 2, כל אחד מריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2.

נמצא וקטורים עצמיים של A:

עבור $\lambda = 0$, יש לפתור: $(0I - A)v = 0$ כלומר: $Av = 0$ כאשר: $v = (x, y, z, w)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$

$$(x, y, z, w) = (x, y, x, y) = x(1,0,1,0) + y(0,1,0,1)$$

לכן וקטורים עצמיים בלתי תלויים השייכים ל- 0 הם: $\{(1,0,1,0)\ ,\ (0,1,0,1)\}$.

נמצא וקטורים עצמיים עבור $\lambda = 2$. אפשר לפתור: $(2I - A)v = 0$ כמו קודם, ואפשר להיעזר בסעיף א':

לפי סעיף א': $A^2 = 2A$ כלומר: $AA = 2A$. נסמן ב- A_j את העמודה ה-j-ית של A לכל $j=1,..,4$ אז:

$$A(A_1\ A_2\ A_3\ A_4) = 2(A_1\ A_2\ A_3\ A_4) \quad \Rightarrow \quad AA_j = 2A_j$$

כלומר, כל עמודה של A היא וקטור עצמי השייך ל- 2. לכן וקטורים בלתי תלויים השייכים לערך עצמי 2 יהיו העמודות הבלתי תלויות של A (ויש 2 כאלה כי $r(A) = 2$). כלומר וקטורים עצמיים בלתי תלויים השייכים ל- 2 הם: $\{(1,0,-1,0)\ ,\ (0,1,0,-1)\}$.

ג. <u>דרך א'</u>: כדי למצוא את העקבה של $A^4 - 4A^3 + 4A^2$ נמצא ערכים עצמיים שלה ונסכם אותם.

לפי משפט, אם λ הוא ערך עצמי של A, ו- $p(t)$ הוא פולינום כלשהו, הרי ש- $p(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $p(A)$ עם אותו וקטור עצמי v. כאן, $p(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2$.

לכן הערכים העצמיים של: $p(A) = A^4 - 4A^3 + 4A^2$ הם: $p(0)$ מריבוי אלגברי 2 ו- $p(2)$ מריבוי אלגברי 2:

$$p(0) = 0^4 - 40^3 + 40^2 = 0$$

$$p(2) = 2^4 - 42^3 + 42^2 = 16 - 32 + 16 = 0$$

$$tr(A^4 - 4A^3 + 4A^2) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

<u>דרך ב'</u>: לפי סעיף א' $A^2 = 2A$ לכן:

$$A^4 - 4A^3 + 4A^2 = (A^2)^2 - 4AA^2 + 4A^2 = (2A)^2 - 4A\cdot 2A + 4\cdot 2A = 4A^2 - 8A^2 + 8A =$$

$$4\cdot 2A - 8\cdot 2A + 8A = 8A - 16A + 8A = 0 \quad \Rightarrow \quad A^4 - 4A^3 + 4A^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad tr(A^4 - 4A^3 + 4A^2) = tr(0) = 0$$

<u>דרך ג'</u>: לפי סעיף א', הערכים העצמיים של A הם 0 ו- 2 מריבוי אלגברי 2 כל אחד, לכן הפולינום האופייני של A הוא:

$$f(t) = t^2(t-2)^2 = t^2(t^2 - 4t + 4) = t^4 - 4t^3 + 4t^2.$$

לפי משפט קיילי המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה, לכן: $A^4 - 4A^3 + 4A^2 = 0$

ומכאן כי $tr(A^4 - 4A^3 + 4A^2) = 0$.

ד. לפי עמודות המטריצה המייצגת נקבל ש:

$$T(b_1) = b_1 - b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = b_2 - b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(b_3) = -b_1 + b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_4) = -b_2 + b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aT(b_1) + bT(b_2) + cT(b_3) + dT(b_4) =$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}$$

כי B הוא הבסיס הסטנדרטי.

<u>שאלה מס. 3</u> : (15 נקודות)

יהי $T:R_3[x]\to R_3[x]$ אופרטור לינארי כך ש- $\dim \operatorname{Im} T < \dim KerT$

($R_3[x]$ הוא מרחב הפולינומים ממעלה 3 לכל היותר מעל R).

יהי $B=\{1\,,1+x,1+x^2\,,\,1+x^3\}$ בסיס של $R_3[x]$, ותהי $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\1&a&b&c\\0&d&e&f\\1&g&h&i\end{pmatrix}$

המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

א. מצא את תשעת הנעלמים $a,b,c,\ldots,i$.

ב. מצא את $T(1+x+x^2+x^3)$.

פתרון שאלה מספר 3

א. מאחר ו- $\dim(R_3[x]) = 4$, הרי ש- $\dim\mathrm{Im}T + \dim\mathrm{Ker}T = \dim(R_3[x]) = 4$. לפי הנתון $\dim \operatorname{Im} T < \dim KerT$ ולכן יש שתי אפשרויות:

I. $\dim\mathrm{Im}T = 0$ ו- $\dim\mathrm{Ker}T = 4$;

II. $\dim\mathrm{Im}T = 1$ ו- $\dim\mathrm{Ker}T = 3$;

אפשרות I לא תתכן, כי אם $\dim\mathrm{Im}T = 0$ הרי שאז T היא העתקת ה- 0, וכל מטריצה שמייצגת אותה היא מטריצת ה- 0, אך המטריצה המייצגת אותה שונה מ- 0 לכן I לא יתכן, ומכאן כי רק II נכון, כלומר: $\dim\mathrm{Im}T = 1$ ו- $\dim\mathrm{Ker}T = 3$;

לפי משפט, דרגת המטריצה המייצגת שווה למימד התמונה, לכן $r([T]_B) = 1$, כלומר כל שורה במטריצה היא כפולה של השורה הראשונה, ו-

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\1&2&2&2\\0&0&0&0\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

לכן: $(a\,,b\,,c) = (2\,,2,2)$; $(d\,,e\,,f) = (0\,,0,0)$; $(g\,,h\,,i) = (2\,,2,2)$.

ב. לפי משפט: $[T]_B[v]_B = [T(v)]_B$. נחשב את $[v]_B$ כאשר: $v = 1 + x + x^2 + x^3$.

קל לראות כי:

$$v = 1 + x + x^2 + x^3 = -2(1) + 1(1 + x) + 1(1 + x^2) + 1(1+x^3)$$

לכן: $[v]_B = [v = 1 + x + x^2 + x^3]_B = (-2 , 1 , 1 , 1)$.

ולמי שלא רואה, הנה החשבון:

$$1 + x + x^2 + x^3 = a(1) + b(1 + x) + c(1 + x^2) + d(1+x^3)$$

$$\begin{cases} 1 = a + b + c + d \\ 1 = b \\ 1 = c \\ 1 = d \end{cases}$$

$$1 = a + b + c + d = a + 3 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1$$

$$1 + x + x^2 + x^3 = -2(1) + 1(1 + x) + 1(1 + x^2) + 1(1 + x^3)$$

$$\left[1 + x + x^2 + x^3\right]_B = (-2, 1, 1, 1)$$

מכאן:

$$[T]_B[v]_B = [T(v)]_B =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad [T(v)]_B = (4, 4, 0, 4)$$

$$T(v) = 4(1) + 4(1 + x) + 0(1 + x^2) + 4(1 + x^3) = 12 + 4x + 4x^3$$

שאלה מס. 4 : (15 נקודות)

$$T: R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$$

כך ש - $T(A) = A - A^t$

א. מצא בסיס ל- $KerT$ ול- $\operatorname{Im} T$.
ב. הוכח כי T ניתנת ללכסון.
ג. הוכח כי $T^5 = 4T^3$.

פתרון שאלה מספר 4

א. נמצא בסיס ומימד לגרעין ולתמונה בשתי דרכים:

דרך א' – בדרך סטנדרטית:

$$T(A) = A - A^t \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ -b+c & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} T$:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ -b+c & 0 \end{pmatrix} = (b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$KerT$:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ -b+c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b - c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$$

$$\ker T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b-c\right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

דרך ב' – שיקולים מסוג אחר:

קל לראות כי אם A מטריצה סימטרית, אז:

$$T(A) = A - A^t = A - A = 0$$

כלומר כל מטריצה סימטרית נמצאת בגרעין של T. כיוון שמימד מרחב המטריצות הסימטריות 2×2 שווה ל- 3, הרי שמימד הגרעין הוא לפחות 3 (כי אולי יש עוד וקטורים בגרעין שהם לא מטריצות סימטריות) , ולכן, מימד התמונה הוא לכל היותר 1.

נחשב תמונה של מטריצה לא סימטרית כלשהי (שימו לב כי "לא סימטרית" אינו שווה "אנטי סימטרית")

$$T\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

מצאנו מטריצה שונה מ- 0 בתמונה, לכן מימד התמונה הוא 1, ובסיס לתמונה הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

ומכאן כי הגרעין הוא מרחב המטריצות הסימטריות, ובסיס לגרעין הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ב. נפתור בשתי דרכים:

<u>דרך א'</u> – באמצעות מטריצה מייצגת:

נמצא מטריצה מייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי E של $R^{2\times2}$.

$$T(A)=A-A^t \qquad T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b-c\\-b+c&0\end{pmatrix}$$

$$A=[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדרגה 1, לכן 0 הוא ערך עצמי מריבוי גיאומטרי:

$$n - r(0I - A) = 4 - r(A) = 4 - 1 = 3$$

לכן הריבוי האלגברי של 0 הוא לפחות 3.

A היא מטריצה 4×4 לכן יש לה 4 ערכים עצמיים, ולפחות שלושה מהם הם 0. נמצא את הערך העצמי הנוסף לפי העקבה של A:

$$\text{trace}(A) = 0 + 0 + 0 + \lambda_4 = 2$$

$$\lambda_4 = 2$$

קיבלנו כי הערך העצמי הנוסף הוא 2, וכיוון שהוא מופיע רק פעם אחת, הרי שהריבוי האלגברי שלו הוא 1, ובהכרח גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל- 1. כיוון ש- $\lambda_4 \neq 0$, הרי ש- 0 מופיע רק 3 פעמים כערך עצמי, לכן הריבוי האלגברי שלו הוא 3.

קיבלנו כי לכל ערך עצמי, ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי לכן A לכסינה, ומכאן כי גם T לכסינה.

<u>דרך ב'</u> – לפי המשפט שמרחב המטריצות הריבועיות הוא הסכום הישר של מרחב המטריצות הסימטריות ומרחב המטריצות האנטי סימטריות.

לפי הגדרת T , ניתן לראות כי אם A מטריצה סימטרית, אז:

$$T(A) = A - A^t = A - A = 0 = 0A$$

כלומר כל מטריצה סימטרית היא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי 0.

ניתן גם לראות כי אם A מטריצה אנטי סימטרית, אז:

$$T(A) = A - A^t = A - (-A) = A + A = 2A$$

כלומר כל מטריצה אנטי סימטרית היא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי 2.

ריבוי גיאומטרי של ערך עצמי שווה, לפי הגדרה, למימד המרחב העצמי, כלומר למספר הוקטורים העצמיים הבלתי תלויים ליניארית השייכים לו.

לכן, ריבוי גיאומטרי של 0 שווה לפחות (כי אולי יש עוד וקטורים עצמיים ל- 0 שהם לא מטריצות סימטריות) למימד מרחב המטריצות הסימטרית 2×2 כלומר ל- 3;

וריבוי גיאומטרי של 0 שווה לפחות (כי אולי יש עוד וקטורים עצמיים ל- 2 שהם לא מטריצות אנטי סימטריות) למימד מרחב המטריצות האנטי סימטרית 2×2 כלומר ל- 1;

נבדוק כמה וקטורים עצמיים בלתי תלויים מצאנו בינתיים:

לפי המשפט שמרחב המטריצות הריבועיות הוא הסכום הישר של מרחב המטריצות הסימטריות ומרחב המטריצות האנטי סימטריות, הרי שמימד מרחב המטריצות הריבועיות 2×2 (ששווה ל- 4) שווה לסכום הישר של מימד מרחב המטריצות הסימטריות ומימד מרחב המטריצות האנטי סימטריות. אבל סכום זה הוא: $3 + 1 = 4$, לכן מצאנו כבר 4 וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

כיוון שמימד המרחב כולו הוא 4, הרי שאין עוד וקטורים עצמיים בלתי תלויים, וקיבלנו ש- T לכסין לפי משפט, $T: V \to V$ לכסין אם"ם יש לו n וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית (כאשר $n = \dim V$).

ג. לפי סעיף ב', מצאנו כי ערכים עצמיים של T הם 0 מריבוי אלגברי 3 ו- 2 מריבוי אלגברי 1, לכן הפולינום האופייני של T הוא:

$$f(t) = t^3(t-2) = t^4 - 2t^3$$

לפי משפט קיילי המילטון, T מאפס את הפולינום האופייני שלו, לכן:

$$f(T) = T^3(T-2) = T^4 - 2T^3 = 0$$

$$T^4 - 2T^3 = 0$$

$$T^4 = 2T^3 \qquad /\cdot T$$

$$T^5 = 2T^4 = 2(2T^3) = 4T^3$$

משי"ל